ANALYSIS

Funktionentraining

Ganzrationale Funktionenscharen

3. Grades

Umfangreiche Aufgaben

Lösungen ohne CAS und GTR

Alle Methoden ganz ausführlich

Mit Zusatzaufgaben

Datei Nr. 71223

Stand 15. Februar 2025

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik und Studium

https://mathe-cd.de

Vorwort

Diese Sammlung an umfangreichen Aufgaben zu Funktionen 3. Grades mit Parametern sind zur Auswahl für Übungszwecke gedacht. Meistens Abiturniveau.

Die Musterlösungen sind ohne CAS- oder GTR erstellt worden, sodass alle Methoden ausführlich durchgerechnet worden sind. Wer dies nicht benötigt, weil er einen höherwertigen Rechner verwenden darf, kann diese Lösungen dennoch verwenden um die Methoden zu trainieren und die Lösungen zu vergleichen.

Aus folgender Liste kann man erkennen, welche Zusatzaufgaben vorkommen.

Inhalt

Aufgabe 3.1

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = x^3 - t \cdot x^2 \quad \text{für } t > 0.$$

a) Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte.
Zeichne das Schaubild K_3 von f für $x \in [-1; 3{,}5]$.

b) Berechne die Ortskurve C der Tiefpunkte.
Welche Einschränkung gibt es?

c) An welcher Stelle u haben K_3 und C eine parallele Tangente?

d) Durch welche Punkte gehen alle Kurven der Schar?

Welche Kurve K_t geht durch den Punkt $A(4\,|\,32)$ und welche durch $B(-2\,|\,4)$
Es sei $P(x\,|\,y)$ ein beliebiger Punkt, der nicht der Ursprung ist.
Wie viele Kurven gehen durch P?

e) In welchem Verhältnis teilt C die von K und der x-Achse begrenzte Fläche?

Aufgabe 3.2

Zu jedem t > 0 sind die Funktionen f_t und g_t gegeben durch

$$f_t(x) = -\tfrac{1}{18}x^3 + \tfrac{1}{2}tx^2 \quad \text{und} \quad g_t(x) = \frac{t}{6}x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Untersuchen Sie K_1 auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Extrem-und Wendepunkte.
Skizzieren Sie K_1.

b) In welchen Punkten besitzt K_1 die Steigung $-\tfrac{9}{2}$?
Zeigen Sie, dass die Gerade g mit $y = -\tfrac{9}{2}x + \tfrac{81}{2}$ Tangente an K_1 ist.
Die Gerade g bildet zusammen mit der Wendetangente von K_1 und der x-Achse ein Dreieck.
Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt.

c) Tragen Sie C_1 in die Skizze aus Teilaufgabe a) ein.
Das Schaubild K_1 schließt im ersten Feld mit der x-Achse eine Fläche ein. Das Schaubild C_1 zerlegt diese Fläche in zwei Teilflächen.
Zeigen Sie, dass das Verhältnis der Teilflächen von t unabhängig ist.

Allgemeine Fragestellung:

d) Durch $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$; $a \neq 0, b \neq 0$
ist eine Funktion f gegeben.
Zeigen Sie: Ist x_N Nullstelle ($x_N \neq 0$), x_E Extremstelle ($x_E \neq 0$) und x_W Wendestelle von f,
so ist x_E das arithmetische Mittel von x_N und x_W.
Welche Beziehung muss zwischen a und b bestehen, damit der Wendepunkt des Schaubildes von f auf der ersten Winkelhalbierenden liegt?

Aufgabe 3.3

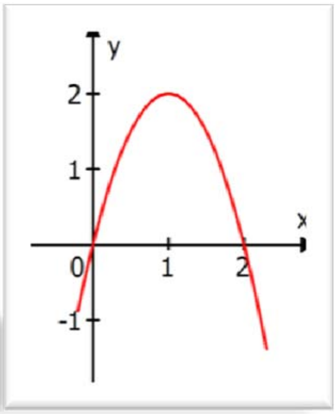
Für jedes k > 0 ist eine Funktion f_k gegeben durch $f_k(x) = -kx^3 + 3k^2x^2$, $x \in \mathbb{R}$
Ihr Schaubild sei C_k.

a) Untersuchen Sie C_1 auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Extrem-und Wendepunkte.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Wendetangente von C_1.
Zeichnen Sie C_1 für $-1 \le x \le 3{,}5$ (Längeneinheit 1 cm).

b) Zeigen Sie: Die drei Punkte des Schaubildes C_1 mit den x-Werten 2, -2 und 3 liegen auf einer Geraden. Diese Gerade und C_1 schließen zwei Flächen ein.
Berechnen Sie den Inhalt der kleineren Fläche.

c) Für welche k liegt B(3 | -6) auf C_k? Welches ist das kleinste a, so dass B_a(3 | a) auf einem Schaubild C_k liegt?

d) In der Skizze ist das Schaubild der Ableitung g' einer Funktion g zu sehen. Begründen Sie mithilfe des Bildes, dass das Schaubild von g einen Hochpunkt, einen Tiefpunkt und einen Wendepunkt mit positiver Steigung hat.



Aufgabe 3.4

Eine ganzrationale Funktion f_t 3. Grades hat ein Schaubild K_t, das zum Ursprung symmetrisch ist, dort die Tangentensteigung t hat und die x-Achse bei 3t schneidet.

a) Stelle die Gleichung der Funktion f_t auf. (Ergebnis: $f_t(x) = -\frac{1}{9t} \cdot x^3 + tx$).

b) Untersuche K_t auf Extrem- und Wendepunkte.
Zeichne K_2 im Intervall $]-6\,;6\,[$ und $K_{-\frac{1}{2}}$ im Intervall $]-3\,;3\,[$ mit Längeneinheit 1 cm.
Zeige, dass sich diese beiden Kurven im Ursprung rechtwinklig schneiden.

c) Es sei $t_1 > 0$ und $t_2 < 0$. Berechne die Schnittpunkte der Kurven K_{t_1} und K_{t_2}.
Wo liegen die Schnittpunkte der Kurven K_{t_1} und K_{t_2}, wenn $t_2 = -\frac{1}{t_1}$ gilt?
Zeige: K_{t_1} und K_{t_2} schneiden sich genau dann in O rechtwinklig, wenn gilt $t_1 \cdot t_2 = -1$.

d) Die Schaubilder K_{t_1} und K_{t_2} mit $t_1 \cdot t_2 = -1$ schließen für $x \ge 0$ eine Fläche vom Inhalt $A(t_1)$ ein. Für welchen Wert von t_1 nimmt dieser Inhalt ein Minimum an? Berechnen diesen Wert.

e) Es sei t > 0. Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Hochpunkt von K_t und die Koordinatenachsen begrenzen ein Rechteck. Dieses wird von K_t in zwei Teilflächen $A_1(t)$ und $A_2(t)$ zerlegt. Zeige, dass das Verhältnis dieser Teilflächen von t unabhängig ist.

Aufgabe 3.5

Die Funktion f_k besitzt die Nullstelle $x_O = k$ und hat die Ableitungsfunktion f_k' mit

$f_k'(x) = 3 \cdot \left(\frac{x^2}{2k^2} - \frac{x}{k} \right)$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^+$. Ihr Schaubild sei C_k.

a) Bestimme den Funktionsterm $f_k(x)$.

Untersuche C_k auf gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne C_3 für $-3 \le x \le 9$, LE 1 cm.

b) Das Schaubild G_k einer ganzrationalen Funktion 2. Grades g_k schneidet C_K auf der y-Achse, geht durch den Tiefpunkt von C_k und hat für $x_1 = \frac{3}{2}k$ eine waagrechte Tangente.
Bestimme $g_k(x)$. (Ergebnis: $g_k(x) = \frac{1}{k}x^2 - 3x + k$)
Zeichne G_3 in das Achsenkreuz von Teilaufgabe a) für $-1 \le x \le 9$ ein,

Das Kurvenstück von C_k zwischen Hoch- und Tiefpunkt begrenzt zusammen mit G_k eine Fläche. Berechne den Inhalt dieser Fläche.

c) Die Kurven C_3 und G_3 schneiden aus der Geraden $x = u$ $(0 < u < 6)$ eine Sehne aus.
Für welchen Wert von u wird diese Sehne am längsten?

d) G_k schneidet die x-Achse in zwei Stellen x_1 und x_2 $(x_1 < x_2)$. Gibt es einen Wert von k, so dass die Tangente von G_k an der Stelle x_1 parallel zur Wendetangente von C_k ist?
Zeichne G_3 in das Achsenkreuz von Teilaufgabe a) für $-1 \le x \le 4$ ein,
Das Kurvenstück von C_k zwischen Hoch- und Tiefpunkt begrenzt zusammen mit G_k eine Fläche. Berechne den Inhalt dieser Fläche.

Aufgabe 3.6

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{t}(x^3 - 9x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K_t.

a) Untersuchen Sie K_t auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Hoch-, Tief-und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_6 für $-4 \le x \le 4$ (Längeneinheit 1 cm).
Jede Kurve K_t umschließt mit der positiven x-Achse eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt.

b) Die Gerade n schneidet das Schaubild K_6 im Punkt N(3I0) rechtwinklig.
Bestimmen Sie die weiteren Schnittpunkte von n und K_6.

c) Die Gerade $x = 1$ schneidet das Schaubild K_t im Punkt R_t und sie schneidet die Gerade $y = tx$ im Punkt S1. Berechnen Sie die Länge der Strecke R_tS_t. Wie lang ist diese Strecke mindestens?

d) Bei jedem Schaubild K_t legen die beiden Schnittpunkte mit der x-Achse $N_1(3|0)$, $N_2(-3|0)$ und seine Extrempunkte an den Stellen $x_1 = \sqrt{3}$ und $x_2 = -\sqrt{3}$ ein Parallelogramm P_t fest.
Zeigen Sie: Für $t = 3\sqrt{2}$ ist P_t ein Rechteck.
Untersuchen Sie, ob P_t eine Raute sein kann.

Aufgabe 3.7

Für jedes $t \neq 0$ ist die Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = x^3 - 3t \cdot x^2 + \left(\tfrac{9}{4}t^2 + 1\right) \cdot x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

Das Schaubild von f_t ist K_t.

a) Zeigen Sie, dass K_1 keine Extrempunkte besitzt.
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_1.
Zeichnen Sie K_1 für $0 \leq x \leq 3$.

b) Die Tangente an K_1 im Ursprung begrenzt mit K_1 eine Fläche.
Zeichnen Sie diese Tangente in das Koordinatensystem von a) ein.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche mit Hilfe einer Stammfunktion.

c) Zeigen Sie, dass jedes Schaubild K_t die erste Winkelhalbierende berührt.

d) Berechnen Sie die Steigung m_t von K_t an der Stelle $x = 1$.
Zeigen Sie, dass $m_t \geq 0$ für alle $t \neq 0$.

Aufgabe 3.8

Gegeben ist die Funktion f_t für $t \in \mathbb{R}^+$ durch $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x + \frac{2}{3}t^3$

a) Zeige, dass f_t die Nullstelle $x_N = -2t$ hat. Berechne die weiteren Nullstellen.

b) Berechne Extrem- und Wendepunkte des Schaubilds K_t von f_t.

c) Berechne die Gleichung der **Wendetangente**. Für welches t geht diese durch $Q(2\,|\,0)$?

d) Auf welcher **Ortskurve** liegen alle Hochpunkte?

e) Zeige, dass sich zwei verschiedene Kurven dieser Schar stets in genau einem Punkt schneiden. **Gibt es einen Punkt, durch den alle Scharkurven gehen**?

f) Zeichne die Schaubilder K_1 und K_2.

Aufgabe 3.9

Gegeben ist die Funktion f_t für $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^+$ durch $f_t(x) = \frac{1}{2t}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}tx$

a) Berechne für das Schaubild K_t von f_t die Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte.

b) Berechne die Gleichung der Ortskurve C der Hochpunkte.
Zeichne K_1 und K_2 sowie die Ortskurve C in ein gemeinsames Koordinatensystem.

c) $S(u \mid v)$ sei ein Punkt des Schaubilds K_2 zwischen den Nullstellen.
Das Lot von S auf die x-Achse schneidet diese in R.
Berechne den Inhalt A(u) des Dreiecks ORS.
Für welchen Wert von u nimmt dieser Inhalt einen extremen Wert an.
Berechne diesen und entscheide die Art des **Extremwert**es.

d) Die Gerade g durch den Wendepunkt und den Tiefpunkt der Kurve K_t begrenzt zusammen mit K_t eine **Fläche**. Berechne diese in Abhängigkeit von t.

e) Wo schneiden sich zwei verschiedene Scharkurven?

Aufgabe 3.10

Gegeben ist die Funktion f_t für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und für $x \in \mathbb{R}$ durch $f_t(x) = tx^3 - 3(t+1)x$

K_t sei das Schaubild von f_t .

a) Untersuche das K_1 auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Hoch- Tief- und Wendepunkte.
Zeichne K_1 für $-2,5 \le x \le 2,5$ in ein Achsenkreuz mit Längeneinheit 1 cm.

b) K_1 und die positive x-Achse begrenzen eine **Fläche**. Berechne deren Inhalt.

c) Bestimme die Anzahl der Schnittpunkte mit der x-Achse in Abhängigkeit von t.
Berechne für t > 0 den Inhalt der Fläche, die von der Kurve und der positiven x-Achse begrenzt wird. Zeige, dass dieser Flächeninhalt für t = 1 ein absolutes Minimum annimmt.

d) Berechne für $t \neq 1$ die **gemeinsamen Punkte** von K_1 und K_t.
Was folgt ohne weitere Rechnung aus diesem Ergebnis für die drei gemeinsamen Punkte zweier beliebiger Scharkurven?

Aufgabe 3.11

Zu jedem $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und für $x \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$

K_t sei das Schaubild von f_t .

a) Untersuche K_t auf gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K_3 im Bereich $-1 \le x \le 4$ sowie seine Wendetangente. (LE1 cm)

b) Welche Kurve C bilden die Wendepunkte W_t der Kurven K_t für alle zugelassenen Werte von t? Für welche Werte von t schneiden C und K_t einander in W_t senkrecht?

c) Eine Parabel 2. Ordnung P_t geht durch die gemeinsamen Punkte von K_t mit der x-Achse und berührt K_t im Ursprung. Stelle deren Gleichung auf und weise nach, dass K_t und P_t keine weiteren gemeinsamen Punkte haben.

d) In welchem Verhältnis teilt K_t die von P_t und der x-Achse eingeschlossene Fläche?

e) Welche Beziehung muss zwischen r und s ($r \neq s$) bestehen, damit sich die Kurven K_r und K_s im Ursprung berühren? Zeige: Zwei Kurven K_r und K_s , die sich nicht im Ursprung berühren, schneiden sich in genau zwei Punkten.

Aufgabe 3.12

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat den Extrempunkt $E(t \mid 0)$ und den Wendepunkt $W\left(\frac{2}{3}t \mid \frac{1}{27}t^3\right)$. $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

a) Stelle die Funktionsgleichung auf. (Erg.: $f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$)

b) Berechne die Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von t.

c) Berechne die Extrempunkte.

d) Welche Gleichung hat die Ortskurve der Wendepunkte?

e) Für welche Werte von t schneiden C und K_t einander in W_t senkrecht?

f) Welche Kurve der Schar geht durch $Q(4 \mid 2)$?

g) Durch welche Punkte der Zeichenebene gehen keine Kurven der Schar?

Aufgabe 3.13

a) Eine Kurvenschar 3. Grades hat in ihren Wendepunkten $W\left(\frac{2}{3}k \mid \frac{4}{9}k\right)$ $(k \in \mathbb{R}^+)$ Tangenten mit der Steigung -2 und schneidet die x-Achse bei x = k. Bestimme die Gleichung der Kurvenschar.

b) Berechne alle Schnittpunkte mit der x-Achse sowie beide Extrempunkte der Kurve C_k
Zeichne C_6 in eine Achsenkreuz für $-0,5 \le x \le 8$ mit LE 1 cm.
Bestimme die Ortskurve K der Wendepunkte der Kurven C_k für alle zugelassenen Werte von k und zeichne K in das vorhandene Schaubild ein.

c) C_k und die x-Achse begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A(k).
Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{2}{3}x$ zerteilt diese Fläche in zwei Teilflächen mit den Inhalten A_1 und A_2. Berechne das Flächenverhältnis $A_1 : A_2$.

d) G_k sei die Parabel, die durch den Hochpunkt und den Tiefpunkt der Kurve C_k geht und den Scheitel bei $x_S = \frac{1}{2}k$ hat.
Bestimme die Gleichung von G. (Ergebnis: $g_k(x) = -\frac{4}{k}x^2 + 4x$.
Berechne den Scheitel von G_k und zeichne G_6 in das vorhandene Achsenkreuz ein.

e) Der Kurvenbogen von C_k zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt und die Parabel G_k begrenzen ein Flächenstück. Berechne ihren Inhalt B(k).

Aufgabe 3.14

a) Eine Parabelschar 3. Ordnung hat im Ursprung die Tangente mit der Gleichung $y = 4t^2x$ und den Extrempunkt $E\left(\frac{4}{3}t \mid \frac{64}{27}t^3\right)$. Welche Gleichung hat die Schar?

Gegeben ist nun die Funktionenschar $f_t(x) = \frac{1}{4}x^3 - tx^2 + 4t^2x$ für t > 0. Ihr Schaubild sei K_t.

b) Untersuche K_t auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte.
Zeichne K_1 und $K_{0,5}$ in eine gemeinsames Koordinatensystem für $0 \le x \le 4,5$ mit Längeneinheit 2 cm.
Welche Gleichung hat die Ortskurve der Hochpunkte?

c) $P(u \mid v)$ sei ein Punk t von K_1 für $0 < u < 4$. Das Lot von P auf die x-Achse schneidet diese im Lotfußpunkt Q. Berechne den Inhalt A(u) des Dreiecks OPQ.
Für welchen Wert von u nimmt dieser Flächeninhalt einen Extremwert an.
Bestimme die Art dieses Extremums und seine Größe.

d) Die Gerade x = u mit 0 < u < 3 schneidet K_1 in A und $K_{0,5}$ in B.
Für welches u nimmt die Strecke AB eine extreme Länge an?
Bestimme die Art dieses Extremums und seine Größe.

e) Zeige, dass sich zwei verschiedene Kurven K_{t1} und K_{t2} immer genau zweimal schneiden.
Berechne die Abszissen beider Schnittpunkte.

Aufgabe 3.15

a) Bei einer Schar Parabeln 3. Grades gehen alle Kurven durch die Punkte $A(0\,|\,-4)$ und $B(-2\,|\,-2)$. In B beträgt die Tangentensteigung -t. Der Wendepunkt einer Scharkurve liegt bei $x_W = -\frac{4}{3}t$. Bestimme die Gleichung der Parabelschar K_t.

Zeichne die Schaubilder K_{-1} und K_{-2} in ein gemeinsames Achsenkreuz.

b) Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch $f_t(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}t \cdot x^2 + \left(t - \frac{3}{2}\right)x - 4$.

Beweise durch eine neue Rechnung, dass sich alle Kurven der Schar in zwei von t unabhängigen Punkten schneiden

c) Zeige, dass jede Scharkurve genau zwei Extrempunkte besitzt.

Gibt es eine Stelle, die bei keiner der Scharkurven als Extremstelle in Erscheinung treten kann?

d) Wie groß ist die Fläche, die zwei verschiedene Scharkurven zwischen ihren Schnittpunkten begrenzen? (Setze $t_1 < t_2$ voraus).

(Anleitung: Beweise zuerst, dass dann $f_{t,1}(x) > f_{t,2}(x)$ ist).

Wie groß ist daraufhin die Fläche zwischen K_{-1} und K_2?

Gibt es andere Kurvenpaare, die eine Fläche mit demselben Inhalt einschließen?

Aufgabe 3.16

Gegeben ist eine Funktion f mit einem Parameter p:

$$f_p(x) = x^3 + p \cdot \left(x^2 + x\right) + 2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R}$$

a) Es gibt zwei Zahlen x_1 und x_2, deren Funktionswert von p unabhängig ist. Berechne sie.

b) Für welche p hat f_p keine lokalen Extremwerte?

c) Zeichne das Schaubild K_3 von f_3 für $-2 \le x \le 0$.

und berechne den Inhalt der Fläche, die von K_3 und den Koordinatenachsen begrenzt wird.

Aufgabe 3.17

Gegeben ist eine Funktion f_t durch $f_t(x) = x^3 - 2kx^2 + k^2x$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

a) Bestimme die Nullstellen dieser Funktion.

b) Welche endliche Fläche wird vom Graphen K_t der Funktion f_t und der x-Achse eingeschlossen?

c) Bestimme die Punkte von K_t mit einer horizontalen Tangente.

d) Gib die Gleichung der Ortskurve C der Wendepunkte von K_t an.

e) Wie muss t gewählt werden, damit sich K_t und C senkrecht schneiden?

Lösungen

Lösung 3.1

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = x^3 - t \cdot x^2 \quad \text{für } t > 0.$$

a) Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte.
Zeichne das Schaubild K_3 von f für $x \in [-1; 3{,}5]$.

Ableitungen: $f_t'(x) = 3x^2 - 2tx$, $f_t''(x) = 6x - 2t$, $f_t'''(x) = 6$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $f_t(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - tx^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - t) = 0$

1. Faktor: $x_1 = 0$ doppelte Nullstelle, also Berührpunkt.

2. Faktor: $x_2 = t$

Ergebnis: $N_1(0\,|\,0)$, $N_2(t\,|\,0)$

Extrempunkte: Notwendige Bedingung: $f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2tx = 0 \Leftrightarrow x(3x - 2t) = 0$

1. Faktor: $x_1 = 0$ Das war die doppelte Nullstelle

2. Faktor: $3x = 2t \Leftrightarrow x_E = \frac{2}{3}t$

y-Koordinate: $f_t\left(\frac{2}{3}t\right) = \frac{8}{27}t^3 - t \cdot \frac{4}{9}t^2 = \left(\frac{8}{27} - \frac{12}{27}\right)t^3 = -\frac{4}{27}t^3$

Hinreichende Bedingung: $f''\left(\frac{2}{3}t\right) = 6 \cdot \frac{2}{3}t - 2t = 4t - 2t = 2t > 0$ da t > 9: Minimum.

$f''(0) = -2t < 0$ Maximum.

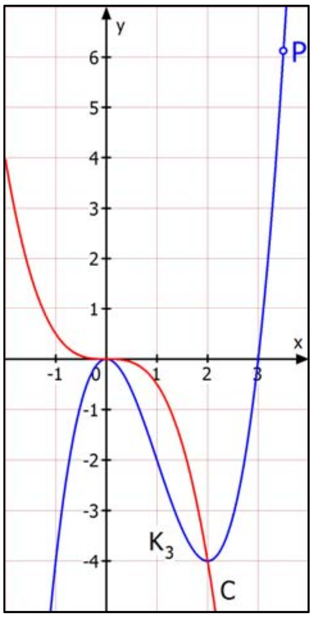
Ergebnis: $H(0\,|\,0)$, $T\left(\frac{2}{3}t\,|\,-\frac{4}{27}t^3\right)$

Wendepunkte: Notwendige Bedingung: $f_t''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 2t = 0 \Leftrightarrow x_W = \frac{1}{3}t$

y-Koordinate: $f_t\left(\frac{1}{3}t\right) = \frac{1}{27}t^3 - t \cdot \frac{1}{9}t^2 = \left(\frac{1}{27} - \frac{3}{27}\right)t^3 = -\frac{2}{27}t^3$

Hinreichende Bedingung: $f'''\left(\frac{1}{3}t\right) = 6 \neq 0$ also liegt ein Wendepunkt vor.

Ergebnis: $W\left(\frac{1}{3}t\,|\,-\frac{2}{27}t^3\right)$



b) Berechne die Ortskurve C der Tiefpunkte.
Welche Einschränkung gibt es?

Es ist $T\left(\frac{2}{3}t\,|\,-\frac{4}{27}t^3\right)$, also $x_T = \frac{2}{3}t \Rightarrow t = \frac{3}{2}x_T$

$y_T = -\frac{4}{27}t^3$

t in y_T ersetzen: $y_T = -\frac{4}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}x_T\right)^3 = -\frac{4}{27} \cdot \frac{27}{8}x_T{}^3$

Also liegen alle Tiefpunkte auf der Kurve C: $y = -\frac{1}{2}x^3$

Doch wegen $t > 0$ gilt für die Ortskurve die Einschränkung $x > 0$

c) An welcher Stelle u haben K_3 und C eine parallele Tangente?

Dazu müssen ihre Tangentensteigungen gleich sein:

$f'(u) = 3u^2 - 6u$ und $g'(u) = -\frac{3}{2}x^2$

$3u^2 - 6u = -\frac{3}{2}u^2 \Leftrightarrow \frac{9}{2}u^2 - 6u = 0 \Leftrightarrow u\left(\frac{9}{2}u - 6\right) = 0$

1. Faktor: $u_1 = 0$, 2-. Faktor: $u_2 = \frac{4}{3}$